

中山大学

2017 年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 361

科目名称: 高等代数

考试时间: 4 月 9 日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 答题要写清题号, 不必抄题。

符号说明, 试卷第 7 题, 第 8 题中符号 A^T 表示矩阵 A 的转置。

1. (20 分) 求以下行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

2. (20 分) 求多项式 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, $g(x) = x^2 - x - 20$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

3. (20 分) 设 W 为下列齐次线性方程组的解空间. 求 W 的维数, 并给出它的一个基:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

4. (10 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $A + B = AB$. 证明矩阵 $A - I$ 可逆, 其中 I 为单位矩阵.

5. (15 分) 设 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$, 且有初始条件: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$. 求 x_{100} .

6. (20 分) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1) 求 A 的所有的特征值和特征向量; (2) 求 A 的最小多项式; (3) 判断 A 是否能够对角化, 说明理由.

7. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 AA^T . 若 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定, 求参数 t 的取值范围.

8. (20 分) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 求一正交矩阵 P , 使得 $P^T AP$ 为对角阵.

9. (10 分) 闭区间 $[0,1]$ 上所有连续函数组成的集合 $C[0,1]$ 对于函数的加法和数乘构成实数域上的线性空间. 证明在 $C[0,1]$ 中 $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ 线性无关, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是互不相同的实数.